Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	3
B2	6
B3	-12
B4	12
B5	4572
B6	6

№ задания	Ответ
B7	0,5
B8	5
B9	42
B10	3
B11	13
B12	17

Ответы к заданиям с кратким ответом

№ задания	Ответ
B1	41
B2	4
B3	22
B4	12
B5	1592,5
B6	17,5

№ задания	Ответ
B7	162
B8	3
B9	96
B10	0,8
B11	3
B12	8

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0, \\ \sqrt{y^2 - y - 3} + 2\sin x = 0. \end{cases}$

Решение.

Решим первое уравнение: $\cos x = 1$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$.

1. Пусть $\cos x = 1$. Тогда $x = 2\pi n$, $n \in Z$, $\sin x = 0$, и из второго уравнения получаем: $y^2 - y - 3 = 0$, откуда $y = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

2. Пусть $\cos x = -\frac{1}{2}$. Из второго уравнения следует, что $\sin x \le 0$. Тогда $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $n \in Z$, а из второго уравнения получаем: $\sqrt{y^2 - y - 3} = \sqrt{3}$, откуда $y^2 - y - 6 = 0$. Корни: $y = -2$ или $y = 3$.

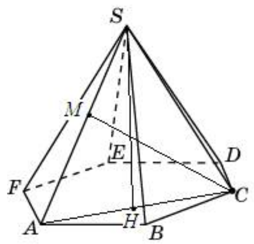
Ответ: $\left(2\pi n;\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right), \left(2\pi n;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right), \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -2\right), \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ 3\right)$, $n \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Тригонометрическое уравнение решено верно, однако ответ в системе неверный.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой, равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SA.

Решение.

В треугольнике ASC проведем высоты CM и SH. Искомое расстояние – длина отрезка CM. Очевидно, $AC \cdot SH = AS \cdot CM$, откуда $CM = \frac{AC \cdot SH}{AS}$.



Треугольник ASC равнобедренный, $AS = SC = 2$, $AC = \sqrt{3}$.

Тогда $SH = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Следовательно, $CM = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{39}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{39}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C3 Решите неравенство $\frac{\lg\left(5y^2 - 2y + 1\right)}{\lg\left(4y^2 - 5y + 1\right)^3} \le \frac{\log_{5^3} 7}{\log_5 7}$.

Решение.

Преобразуем неравенство: $\frac{\lg(5y^2 - 2y + 1)}{3\lg(4y^2 - 5y + 1)} \le \frac{1}{3}$; $\log_{4y^2 - 5y + 1}(5y^2 - 2y + 1) \le 1$; $\log_{4y^2 - 5y + 1}\left(\frac{5y^2 - 2y + 1}{4y^2 - 5y + 1}\right) \le 0$.

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} 4y^2 - 5y + 1 > 0, \\ 4y^2 - 5y + 1 \ne 1, \\ 5y^2 - 2y + 1 > 0, \\ (4y^2 - 5y + 1 - 1)\left(\frac{5y^2 - 2y + 1}{4y^2 - 5y + 1} - 1\right) \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (4y - 1)(y - 1) > 0, \\ y(4y - 5) \ne 0, \\ (4y - 5)(y + 3) \le 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $y < \frac{1}{4}$ или $y > 1$.

Из второго неравенства получаем: $y \ne 0$ и $y \ne \frac{5}{4}$.

Решение третьего неравенства: $-3 \le y \le \frac{5}{4}$.

Решение системы: $-3 \le y < 0$, $0 < y < \frac{1}{4}$ или $1 < y < \frac{5}{4}$.

Ответ: $[-3; 0)$, $\left(0; \frac{1}{4}\right)$, $\left(1; \frac{5}{4}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С4 На стороне прямого угла с вершиной A взята точка O, причем $AO = 7$. С центром в точке O проведена окружность S радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

Решение.

Пусть Q – центр искомой окружности радиуса R, B – точка касания этой окружности со стороной AO, C – точка касания окружностей. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, значит, $\angle BAQ = 45°$. Тогда $AB = QB = R$. Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $OQ = OC + CQ = 1 + R$.

Рассмотрим случай, когда точка B лежит между A и O (рис.1). Тогда $R < 7$. По теореме Пифагора $OQ^2 = QB^2 + OB^2$, или $(1+R)^2 = R^2 + (7-R)^2$. После очевидных упрощений получим уравнение $R^2 - 16R + 48 = 0$, а т.к. $R < 7$, то $R = 4$.

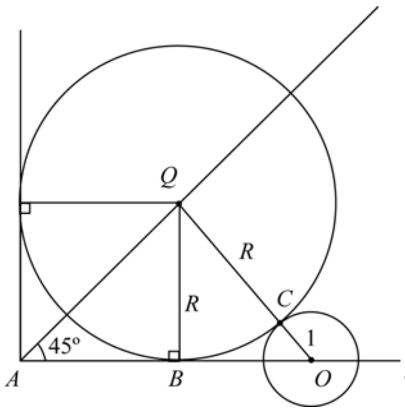


Рис. 1

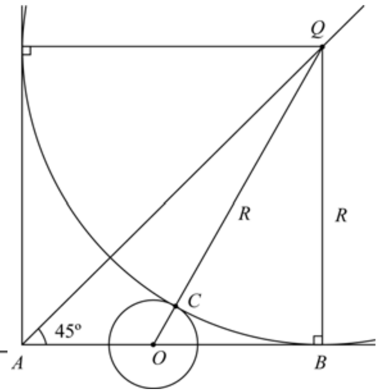


Рис. 2

Если же точка O лежит между A и B (рис. 2), то аналогично получим, что $R = 12$.

Ответ: 4 или 12.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены обе геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрена одна геометрическая конфигурация. Ответ верный, но не показано, что реализуется оба найденных значения.	2
Рассмотрен хотя бы один случай. Ответ неверен из-за вычислительной ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos 2y = \cos y, \\ \sqrt{x^2 - 2x} = 2\sin y. \end{cases}$

Решение.

Решим первое уравнение: $2y = \pm y + 2\pi n,\ n \in Z$, откуда $y = \dfrac{2\pi n}{3}$.

Из второго уравнения следует, что $\sin y \geq 0$. Таким образом $y \neq \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$,

Для двух других случаев получаем:

1. $y = 2\pi k,\ x^2 - 2x = 0$, откуда $x = 0$ или $x = 2$.
2. $y = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\quad x^2 - 2x = 3$, откуда $x = -1$ или $x = 3$.

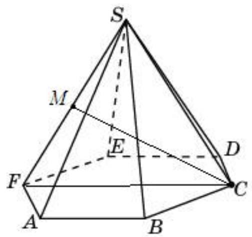
Ответ: $\left(-1; \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), \left(3; \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), (0; 2\pi k),\ (2; 2\pi k),\ k \in Z$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Тригонометрическое уравнение решено верно, но ответ в системе неверный.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой, равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SF.

Решение.

Радиус описанной около правильного шестиугольника окружности равен стороне шестиугольника. Значит, $FC = 2$. Поэтому треугольник FSC – равносторонний. Следовательно, высота CM этого треугольника равна $\dfrac{FS \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.



Ответ: $\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	2
Способ нахождения искомого расстояния верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

С3 Решите неравенство $\dfrac{\ln\left(3y^2 - 2y + 1\right)}{\ln\left(5y^2 - 6y + 1\right)^5} \geq \dfrac{\log_{7^5} 3}{\log_7 3}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$\dfrac{\ln(3y^2 - 2y + 1)}{5\ln(5y^2 - 6y + 1)} \geq \dfrac{1}{5}$;

$\log_{5y^2 - 6y + 1}(3y^2 - 2y + 1) \geq 1$;

$\log_{5y^2 - 6y + 1}\left(\dfrac{3y^2 - 2y + 1}{5y^2 - 6y + 1}\right) \geq 0$.

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} 5y^2 - 6y + 1 > 0, \\ 5y^2 - 6y + 1 \neq 1, \\ 3y^2 - 2y + 1 > 0, \\ (5y^2 - 6y + 1 - 1)\left(\dfrac{3y^2 - 2y + 1}{5y^2 - 6y + 1} - 1\right) \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (5y - 1)(y - 1) > 0, \\ y(5y - 6) \neq 0, \\ (5y - 6)(y - 2) \leq 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $y < \dfrac{1}{5}$ или $y > 1$.

Из второго неравенства получаем: $y \neq 0$ и $y \neq \dfrac{6}{5}$.

Решение третьего неравенства: $\dfrac{6}{5} \leq y \leq 2$.

Решение системы: $\dfrac{6}{5} < y \leq 2$.

Ответ: $\left(\dfrac{6}{5}; 2\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Ответ или отличается от верного конечным числом точек, или при правильном рассуждении неверен из-за арифметической ошибки.	2
Решение содержит верные преобразования, но в ответе либо потеряны верные промежутки, либо приобретены лишние промежутки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

C4 Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Обе окружности лежат по одну сторону от общей касательной. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей касательной. Найдите радиус третьей окружности.

Решение.

Докажем сначала следующее утверждение. Если a – расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, общая касательная касается этих окружностей соответственно в точках A и B, и при этом $a \geq r + R$, то $AB = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$.

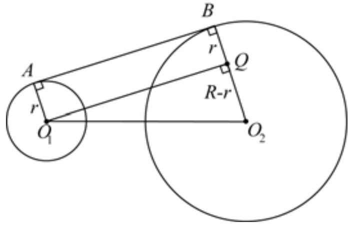


Рис. 1

Действительно, пусть O_1 и O_2 – центры окружностей радиусов r и R соответственно (рис. 1). Из точки O_1 опустим перпендикуляр O_1Q на прямую O_2B. Из прямоугольного треугольника O_1QO_2 находим, что

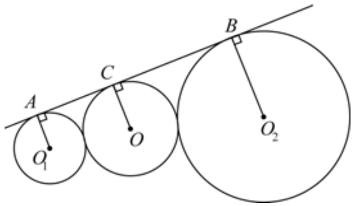
$$AB = O_1Q = \sqrt{O_1O_2^2 - QO_2^2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}.$$

Пусть x – радиус третьей окружности, C – ее точка касания с прямой AB. По доказанному

$$AB = \sqrt{17^2 - (9-1)^2} = 15,$$

$$AC = \sqrt{(x+1)^2 - (x-1)^2} = 2\sqrt{x},$$

$$BC = \sqrt{(x+9)^2 - (x-9)^2} = 2\sqrt{9x} = 6\sqrt{x}.$$



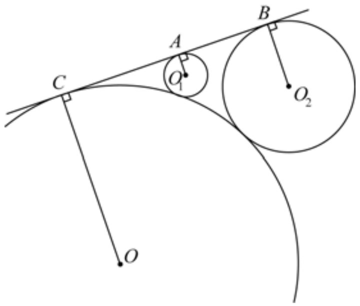


Рис. 2 Рис. 3

Если точка C лежит между A и B (рис.2), то $AC + CB = AB$, или $2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} = 15$. Тогда $\sqrt{x} = \frac{15}{8}$, откуда $x = \frac{225}{64}$.

Если точка C лежит на продолжении отрезка AB (рис. 3), то $CB - AC = AB$, или $6\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 15$. Тогда $\sqrt{x} = \frac{15}{4}$, откуда $x = \frac{225}{16}$.

Ответ: $\frac{225}{64}$ или $\frac{225}{16}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены обе геометрические конфигурации, и получен правильный ответ.	3
Рассмотрены обе возможные геометрические конфигурация, ответ для одной или для обеих неверен из-за ошибки при вычислениях или преобразованиях.	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0